[10] Rényi, Alfréd. «Un diàleg socràtic sobre les matemàtiques». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 17 (2) (2002), p. 51–67. Traducció i notes de Josep M. Font i Llovet.

[11] Rényi, Alfréd. «Un diàleg sobre les aplicacions de les matemàtiques». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 19 (1) (2004), p. 53–74. Traducció de Josep M. Font i Llovet i introducció i notes de Josep Pla i Carrera.

[12] Rényi, Alfréd. «Diàleg sobre el llenguatge del Llibre de la Naturalesa». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 24 (1) (2009), p. 23–62. Traducció i notes de Josep Pla i Carrera.

[13] Sabbagh, Karl. *Dr. Riemann's zeros*. Londres: Atlantic Books, 2002.

[14] Sautoy, Marcus du . *The Music of the Primes Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*. Nova York: HarperCollins Publishers, 2004. Traducció castellana de Joan Miralles, *La música de los números primos*. Barcelona: Acantilado, 2007.

[15] Sautoy, Marcus du. *Symmetry: A Journey into the Patterns of Nature*. Nova York: HarperCollins Publishers, 2008.

Josep Pla i Carrera
UB

Geometria axiomàtica

Autors: Agustí Reventós
Editorial: edició electrònica de la SCM, volum 5

Tots els matemàtics venerem amb fervor religiós Euclides i els tretze volums dels seus *Elements*. Si bé la matemàtica és molt més antiga que els *Elements*, la seva estructuració com un edifici fonamentat en uns conceptes primaris a partir dels quals s'obtenen resultats cada vegada més complexos (teoremes) amb l'ús exclusiu del raonament lògic no la trobem fins a aquesta obra d'Euclides. Dels seus tretze llibres, els més famosos són els dedicats a la geometria (el primer, el tercer i el quart). Una part del seus continguts ha format part durant vint-i-tres segles dels coneixements primaris exigits a qualsevol persona culta.

Com molts de vosaltres sabeu, el primer llibre dels *Elements* comença amb vint-i-tres *definicions* a les quals segueixen cinc *postulats* i cinc *nocions comunes*. No sé si heu llegit mai aquestes definicions. Per si de cas, aquí us n'ofereixo una mostra:

- Un punt és allò que no té part.
- Una línia és una longitud sense amplada.
- Una recta és una línia que esdevé igual respecte de tots els seus punts.

Entre els cinc postulats, el més famós és el cinquè: «Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela» (malgrat que Euclides el redactava d'una altra manera). Us ofereixo també una mostra d'algunes de les afirmacions que Euclides anomenava *nocions comunes*:

- Coses iguals a una tercera són iguals entre si.
- El tot és més gran que les parts.

Tots vosaltres convindreu amb mi que les definicions d'Euclides des del punt de vista rigorós actual no defineixen res. Això ja ho va resoldre D. Hilbert a l'obra *Grundlagen der Geometrie* (Fonaments de la geometria), publicada el 1899, on dóna un sistema complet d'axiomes que substitueixen els postulats d'Euclides. A diferència, però, dels *Elements*, a l'obra de Hilbert no hi ha cap definició dels objectes geomètrics bàsics i sí que hi ha unes certes relacions (anomenades *axiomes*) que han de complir aquests objectes no definits. L'obra de Hilbert, completament rigorosa, és, però, difícil.

Si ara passem a l'ensenyament de la geometria elemental ens trobem que l'ànim rigorista dels anys setanta del segle passat va anar substituint el punt de vista grec de la geometria basat en els criteris d'igualtat de triangles, teorema de Thales, teorema de Pitàgores, etc., pel punt de vista analític de Descartes, on un punt del pla és un element de $\mathbb{R}^2$, una recta és un conjunt de punts que compleixen una equació lineal, etc. Aquest punt de vista analític era (segons creien) més rigorós, però tenia també altres inconvenients. El tractament dels angles, per exemple, és molt feixuc i, com a conseqüència de l'abandó del punt de vista grec, avui dia gairebé cap alumne sap que l'angle inscrit en una circumferència val la meitat de l'arc que abraça.

El llibre que ens ocupa té per objectiu oferir una versió simplificada de la construcció de la geometria del pla (només en dimensió 2) des del punt de vista axiomàtic de Hilbert. Parteix d'una presentació més moderna que la de Hilbert (tingueu en compte que els *Grundlagen der Geometrie* són del 1899) continguda al llibre de N. V. Efimov *Geometría superior*, (editorial Mir de Moscú, 1984). Tot i que Efimov ofereix una versió moderna i molt ben estructurada, el seu llibre conté algunes demostracions complicades que requereixen bastant esforç per part del lector. La intenció del llibre d'Agustí Reventós és simplificar el punt de vista d'Efimov fins a aconseguir que no quedi cap teorema amb una demostració gaire complicada. Però, com es pot fer, això? Doncs substituint alguns dels axiomes usats per Efimov per uns altres de més forts que permetin simplificar les demostracions més enutjoses. Ara bé, modificar axiomes no és pas una tasca fàcil. La geometria construïda des d'un punt de vista axiomàtic és un gran edifici amb una estructura entrellaçada de teoremes que recolzen els uns amb els altres i tots ells amb els axiomes de partida. Per tant, modificar els fonaments resulta sempre una tasca molt delicada. El que subscriu aquest report en pot donar fe, perquè va participar, ja fa anys, amb l'Agustí Reventós en aquesta tasca de cercar un sistema d'axiomes prou forts que permetessin un desenvolupament agradable de la geometria, i recorda la dificultat de trobar-ne una versió encertada.

De les tres geometries que es poden fer en una varietat riemanniana de dimensió 2, simplement connexa i de curvatura constant, la presentació axiomàtica exclou de partida la geometria esfèrica i descriu només l'euclidiana i la hiperbòlica. El capítol primer del llibre porta per títol *Geometria absoluta* i introdueix tres grups d'axiomes: els d'incidència, els d'ordre i els de congruència, que fonamenten els resultats comuns a les geometries euclidiana i hiperbòlica. Els tres criteris ben coneguts d'igualtat de triangles (costat-angle-costat, angle-costat-angle i costat-costat-costat) són presentats aquí alguns com a axiomes i altres com a teoremes. Citem, a tall d'exemple, alguns dels resultats d'aquest capítol (vàlids per a totes dues geometries). Es defineix *angle recte* com l'angle que és congruent amb el seu adjacent (congruent és un concepte primari, indefinit, que respon a la idea intuïtiva de ser iguals, d'igual mesura). Es demostra que existeixen angles rectes i que tots els angles rectes són congruents. Es demostra que des d'un punt exterior a una recta es pot traçar una única perpendicular a la recta, que rectes perpendiculars a una tercera són paral·leles (és a dir, no es tallen), que per un punt exterior a una recta passa una paral·lela a la recta, que un angle exterior d'un triangle és sempre menor que els angles interiors no adjacents, que la suma d'angles interiors d'un triangle és menor o igual que dues rectes, etc.

El segon capítol introdueix l'axioma de les paral·leles (per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela) i descriu la geometria euclidiana, que és la que es pot fer amb tots els axiomes i definicions de la geometria absoluta del capítol primer i l'axioma nou de les paral·leles introduït aquí. Heus aquí alguns dels seus resultats: la suma d'angles d'un triangle és de dues rectes, teorema de Thales, criteris de semblança de triangles, teorema de Pitàgores, etc. A partir de tots aquests resultats introdueix unes coordenades al pla i fa llavors la presentació de Descartes de la geometria: un punt és un element de $\mathbb{R}^2$, una recta és un conjunt de punts les coordenades dels quals compleixen una equació lineal, etc.

Si se substitueix l'axioma de les paral·leles pel seu contrari (existeix un punt exterior a una determinada recta pel qual passa més d'una paral·lela a la recta) sorgeix llavors la geometria hiperbòlica, que es presenta al tercer capítol del llibre a partir del model del semiplà de Poincaré.

El llibre està molt ben escrit, conté moltes figures i la seva lectura resulta fàcil i agradable.

En resum, aquest text ve a curullar un dels desitjos més pregons que pot tenir tot matemàtic: poder copsar l'esperit d'Euclides d'una manera rigorosa per als temps actuals, però sense gaire esforç.

Joan Girbau
UAB

Stability by linearization of the Einstein's field equation

Autors: L. Bruna i J. Girbau
Editorial: Birkhaüser, «Progress in Mathematical Physics»

En tractar de globalitzar la seva teoria de la relativitat especial, és a dir, de fer cosmologia, A. Einstein hi incorporà la gravetat (associada a la matèria), mitjançant la idea que l'efecte d'un camp gravitatori sobre una partícula és exactament el mateix que el d'una acceleració de la mateixa respecte d'un sistema inercial, i que les trajectòries «lliures» havien de ser geodèsiques. Això el portà a definir la gravitació com una propietat de la mètrica en l'espai-temps, on l'evolució de la mateixa en reflexaria els canvis en la distribució de matèria. D'altra banda, considerà aquesta materia distribuïda a l'Univers com un fluid perfecte, i els punts en serien les galàxies.

Així, l'evolució de l'Univers es pot descriure mitjançant les solucions d'una equació entre tensors, anomenada *equació d'Einstein*,

$$\mathrm{Ric}(g) = \chi T,$$

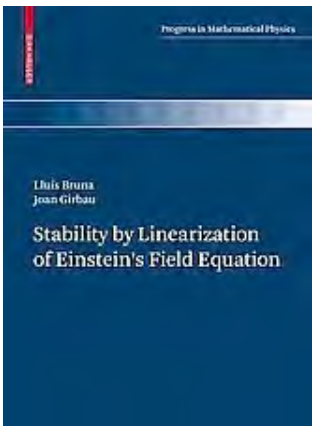
on g representa una mètrica, T és el tensor d'impulsió-energia, corresponent al tensor dels esforços (*stress tensor*) en un fluid perfecte, amb $\operatorname{div} T = 0$ que representa la matèria, i χ és una constant (la constant cosmològica).

En general, T també depèn de g de manera no lineal, i així, expressada en coordenades, l'equació anterior esdevé un sistema de deu10 equacions escalars, en derivades parcials, de segon ordre i no lineals, d'una gran complexitat.

Un procediment habitual en l'estudi dels fenòmens regits per aquest tipus d'equacions és el de la linealització: hom canvia a l'equació per la seva «diferencial», i obté així una equació lineal similar. Llavors hom considera les solucions de l'equació lineal com a aproximacions de les solucions de l'equació original. Al cas de l'equació d'Einstein aquest procés fa aparèixer un operador dalambertià, és a dir, que aquesta part lineal està relacionada amb l'operador de les ones (vectorial).

Sorgeix immediatament la qüestió de la validesa del mètode. En primer lloc hi ha les qüestions generals d'existència i unicitat de solucions de l'equació d'Einstein amb condicions inicials donades, i tot seguit el problema de l'estabilitat del procés de linealització, que clàssicament s'entén com que les solucions de l'equació d'Einstein s'aproximen en l'ordre 1 a les solucions de la linealitzada, diguem-ne així, per a un instant de temps donat, cosa que permet de formular el problema en termes d'estabilitat respecte de condicions de Cauchy.

Aquest problema ha rebut l'atenció de diversos autors, principalment a partir dels anys setanta del segle XX, com ara Y. Choquet-Bruhat i S. Dreser, A. Fischer i J. E. Marsden, V. Moncrief i d'altres, sempre en absència de matèria i molt al voltant del cas en què la mètrica inicial és la de Minkowskii o similar (en un cert sentit).



En tres articles publicats al tombant del segle XXI, els autors d'aquesta monografia contribuïren a resoldre el problema amb resultats per al cas en què hi ha matèria, és a dir, en què en l'equació d'Einstein, T no és nul. Com que la mètrica g també intervé en T com a va-